ARGOMENTI INTRODUTTIVI AI CORSI DI MATEMATICA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA "ENZO FERRARI"

Esponiamo in modo molto succinto le definizioni e le proprietà che verranno ritenute note e utilizzate nei Corsi di Matematica che seguiranno. Per una trattazione più ampia rimandiamo al testo : **P.BOIERI – G.CHITI "Precorso di Matematica" ed. Zanichelli** nel quale si possono trovare anche tutti i grafici delle funzioni che qui vengono omessi.

Nella seconda parte si propongono alcuni quesiti inerenti la materia trattata e vengono indicati esercizi tratti dal testo precedentemente citato che si consigliano per una verifica ed un approfondimento della propria preparazione.

INSIEMI NUMERICI

Gli insiemi numerici sono i seguenti:

- numeri naturali $N = \{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$
- numeri interi $Z = \{0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots,\ \pm n,\ldots\}$
- numeri razionali $Q = \left\{ \dfrac{m}{n}\ con\ m\,,\, n \in Z\ ,\ n \neq 0 \right\}$.

Osserviamo che per i numeri razionali si può dare una rappresentazione decimale con un numero finito di cifre decimali oppure tramite un numero periodico e che vale la uguaglianza $0,999999999\ldots\ldots = 1$.

Presa una retta *r*, fissati su essa due punti distinti O ed A (si è così individuato il verso positivo da O verso A e il segmento unitario OA), è possibile associare ad ogni numero razionale un punto di *r*, il punto B corrisponde al numero $\dfrac{m}{n} > 0$ se la misura del segmento OB è $\dfrac{m}{n}$. Ma su *r* rimangono dei punti che non corrispondono ad alcun numero razionale : ad esempio il punto P tale che il segmento OP è congruente alla diagonale OC del quadrato di lato OA non corrisponde a nessun numero razionale ossia non esiste $\dfrac{m}{n} \in Q\ :\ \dfrac{m}{n} = OP$ con *m* e *n* primi tra loro.

Infatti dovrebbe essere OP = OC tale che $OC^2 = OA^2 + AC^2 = 2$ o anche

$\dfrac{m^2}{n^2} = 2\ ,\quad m^2 = 2\ n^2$ ma questa uguaglianza è impossibile.

Si introduce allora un nuovo insieme numerico che contenga Q e che consenta di rappresentare tutti i punti della retta *r*, tale insieme è l'insieme dei numeri reali R.

Definizione assiomatica di R

Sull'insieme R sono definite due operazioni (addizione e moltiplicazione) che godono delle proprietà :

1) commutativa $a + b = b + a \ , \ a \cdot b = b \cdot a \ , \ \forall \ a, b \in R$

2) associativa $a + (b + c) = (a + b) + c \ , \ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \ , \ \forall \ a,b,c \in R$

3) distributiva $a\,(b + c) = a \cdot b + a \cdot c \ , \forall \ a,b,c \in R$

4) esistenza elementi neutri $a + 0 = a \ , \ a \cdot 1 = a \ , \forall \ a \in R$

5) esistenza opposto e reciproco $a + (-a) = 0 \ , \forall \ a \in R \ ; \ a \cdot a^{-1} = 1 \ , \ \forall \ a \neq 0 \ .$

Su R è definita una relazione d'ordine ($\leq$) che gode delle proprietà:

6) di ordine totale $\forall \ a , b \in R$ *si ha* $a \leq b$ *oppure* $b \leq a$

7) riflessiva $\forall \ a \in R$ *si ha* $a \leq a$

8) transitiva $a \leq b$ *e* $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

9) antisimmetrica $a \leq b$ *e* $b \leq a \Rightarrow a = b$

10) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

11) $a \leq b$ *e* $c > 0 \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$

Vale l'assioma di completezza

12)

$\forall \ A , B \subseteq R$ *con* $A , B \neq \Phi$ *e* $a < b \ , \forall \ a \in A$ *e* $\forall \ b \in B$ *allora* $\exists \ c \in R \ : \ a \leq c \leq b \ \ \forall \ a \in A$ *e* $\forall \ b \in B$.

(osserviamo che il precedente assioma può essere proposto anche in formulazioni diverse da quella qui data).

Notazioni :

$Q^+ = \{ x \in Q \ : \ x > 0 \} \ ; \ Q_0^+ = Q^+ \cup \{0\}$

analoghe notazioni valgono per l'insieme R .

Osservazioni :

- in N non c'è lo zero ne' l'opposto
- in Z non c'è il reciproco
- in Q non vale l'assioma di completezza

(esempio $A = \{ x \in Q^+ : x^2 \leq 2 \}$, $B = \{ x \in Q^+ : x^2 > 2 \}$ non esiste $c \in Q : a \leq c \leq b$, $\forall\, a \in A$ e $\forall\, b \in B$).

ELEMENTI DI GEOMETRIA ANALITICA

Consideriamo un piano e su esso un punto O (detto *origine*) e due rette tra loro ortogonali passanti per il punto O (dette *assi*)e sulle quali si è considerata la stessa unità di misura ed un verso, si dice allora che abbiamo fissato *un riferimento cartesiano ortogonale e monometrico* $\Re$. Ad ogni punto P del piano è univocamente associata una coppia di numeri reali *(a , b)* dette sue *coordinate cartesiane* e scriveremo $P \equiv_{\Re} (a,b)$.

Dati due punti $P_1 \equiv_{\Re} (x_1 , y_1)$, $P_2 \equiv_{\Re} (x_2 , y_2)$, la loro distanza (misura del segmento $P_1 P_2$) è data dalla formula $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, mentre il loro punto medio M ha coordinate $M \equiv_{\Re} \left(\frac{x_1 + x_2}{2} , \frac{y_2 + y_1}{2} \right)$.

Diamo ora alcuni esempi di curve del piano.

La retta

Dati due punti distinti $P_1 \equiv_{\Re} (x_1 , y_1)$, $P_2 \equiv_{\Re} (x_2 , y_2)$, e consideriamo la retta *r* che li congiunge. Se $x_1 = x_2$, i punti della retta *r* hanno tutti ascissa uguale a x_1 pertanto l'equazione della retta è $x = x_1$.

Analogamente, se $y_1 = y_2$, l'equazione della retta *r* è $y = y_1$.

Nel caso in cui si abbia $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, l'equazione della retta *r* è $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Tale equazione può essere posta nella forma $y = m\, x + q$ ed il numero m è detto *coefficiente angolare* della retta.

Le rette $y = m_1\, x + q_1$, $y = m_2\, x + q_2$ sono parallele $\Leftrightarrow m_1 = m_2$;

sono perpendicolari $\Leftrightarrow m_1\, m_2 = -1$.

La circonferenza

Si dice *circonferenza* di centro $C \equiv_{\mathfrak{R}} (x_0 , y_0)$ e raggio r il luogo dei punti del piano che hanno distanza r da C. Un punto $P \equiv_{\mathfrak{R}} (x,y)$ sta sulla circonferenza di centro C e raggio r sse vale la relazione

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

L'ellisse

Fissati due punti distinti F, F' detti *fuochi* ed un numero reale positivo $2a$ maggiore della distanza tra i due fuochi, si chiama *ellisse* il luogo geometrico dei punti P del piano tali che

$PF + PF' = 2a$.

Scelto un sistema di riferimento cartesiano $\mathfrak{R}$ in cui i fuochi stiano sull'asse delle ascisse e O sia il punto medio del segmento FF' , un punto $P \equiv_{\mathfrak{R}} (x,y)$ sta sull'ellisse sse vale la relazione

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, dove si è posto $F \equiv_{\mathfrak{R}} (c, 0)$, $F' \equiv_{\mathfrak{R}} (-c, 0)$, $c > 0$, e $a^2 - c^2 = b^2$.

Osserviamo che la condizione che la distanza tra i due fuochi sia minore di $2a$ equivale a $c < a$, inoltre se tale distanza fosse uguale a $2a$ il luogo descritto coinciderebbe con il segmento FF', mentre se la distanza fosse maggiore di $2a$ si otterrebbe l'insieme vuoto.

L'iperbole

Fissati due punti distinti F, F' detti *fuochi* ed un numero reale positivo $2a$ minore della distanza tra i due fuochi, si chiama *iperbole* il luogo geometrico dei punti P del piano tali che

$PF - PF' = 2a$.

Scelto un sistema di riferimento cartesiano $\mathfrak{R}$ in cui i fuochi stiano sull'asse delle ascisse e O sia il punto medio del segmento FF' , un punto $P \equiv_{\mathfrak{R}} (x,y)$ sta sull'iperbole sse vale la relazione

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, dove si è posto $F \equiv_{\mathfrak{R}} (c, 0)$, $F' \equiv_{\mathfrak{R}} (-c, 0)$, $c > 0$, e $c^2 - a^2 = b^2$. Se $a = b$ e dunque $c = a\sqrt{2}$, l'equazione diventa $x^2 - y^2 = a^2$ e si parla di *iperbole equilatera*.

Osserviamo che, in quest'ultimo caso, se si fissa un riferimento cartesiano $\mathfrak{R}'$ in modo che i due fuochi si trovino sulla bisettrice del primo e terzo quadrante (invece che sull'asse delle ascisse) e precisamente $F \equiv_{\mathfrak{R}'} (a,a)$, $F' \equiv_{\mathfrak{R}'} (-a,-a)$ l'equazione, rispetto a $\mathfrak{R}'$, diventa

$$x\,y = \frac{a^2}{2} .$$

La parabola

Fissati una retta r detta *direttrice* ed un punto F detto *fuoco* che non stia su r , si dice *parabola* il luogo dei punti del piano che hanno stessa distanza da r e da F .

Sia s la perpendicolare a r passante per F e D l'intersezione di r con s . Scelto il sistema di riferimento cartesiano $\Re$ che ha il punto medio del segmento DF come origine degli assi e la retta s come asse delle ordinate (in tal modo si ha $F \equiv_{\Re} (0,p)$) l'equazione della parabola è

$$y = a\,x^2 \quad , \; a = \frac{1}{4\,p} \; .$$

La retta s è detta *asse* della parabola e il punto di intersezione tra la parabola e l'asse (nel caso precedente l'origine degli assi) è detto *vertice* .

Con la traslazione del sistema di riferimento di equazioni

$$X = x - \frac{b}{2a} \; , \quad Y = y + c - \frac{b^2}{4a} \; ,$$ l'equazione della parabola diventa

$$Y = a\,X^2 + b\,X + c \; .$$

FUNZIONI

Dato in ingresso oggetto $\xrightarrow{\text{funzione } f}$ Dato in uscita immagine

Dato l'oggetto, la funzione f fornisce **in modo univoco** la relativa immagine.

Insieme in cui si prendono gli oggetti = dominio = Df ;

insieme di tutte le possibili immagini = codominio = Cf .

Data una funzione f in cui $Df = A$, $Cf \subseteq B$ scriveremo

$f : A \to B$ *o anche* $A \xrightarrow{f} B$.

Se $A, B \subseteq R$, l'insieme $\Gamma = \{ (x,y) : x \in A \, , \; y = f(x) \}$ è detto grafico di f e, considerato un sistema di riferimento cartesiano, l'insieme dei punti le cui coordinate appartengono a Γ fornisce una rappresentazione grafica della funzione.

Tipi di funzione e grafici relativi

Funzioni costanti $f(x) = k$

Funzioni lineari $f(x) = a\,x + b$

Funzioni di proporzionalità inversa $f(x) = \frac{k}{x}$

Funzioni potenza $f(x) = x^n$, $n \in N$

Funzione valore assoluto $f(x) = | x |$.

Se ad elementi distinti di A corrispondono elementi distinti di B, la funzione si dice iniettiva (la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è iniettiva, mentre la funzione $f(x) = x^2$ non lo è).

Se $Cf =$ B, la funzione si dice suriettiva su B (la funzione $f(x) = ax + b$ è suriettiva su R mentre la funzione $f(x) = x^2$ non è suriettiva su R).

Se $f : A \to B$ è iniettiva e suriettiva si dice biunivoca o biiettiva (o corrispondenza biunivoca) ($f(x) = ax + b$ e $f(x) = x^3$ sono biunivoche da R in R).

Osserviamo inoltre che è possibile definire una corrispondenza biunivoca tra l'insieme R ed i punti di una retta r.

Abbiamo poi che una funzione si dice periodica di periodo T se

$f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in Df$. (vedremo più avanti che le funzioni trigonometriche sono periodiche).

Se $f : A \to B$ è iniettiva è possibile definire una nuova funzione detta funzione inversa $f^{-1} : Cf \to A$ tale che $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$.

Esempi : $f : R \to R$ con $y = f(x) = a\,x + b$ si ha $x = f^{-1}(y) = \frac{y - b}{a}$,

$f : R \to R$ con $y = f(x) = x^3$ si ha $x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$,

Date due funzioni $f : A \to B$, $g : Dg \to C$ se $B \subseteq Dg$ è possibile definire una funzione, detta funzione composta $g \circ f : A \to C$ tale che $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Esempi : $f : R \to R$ *con* $y = f(x) = a\,x + b$, $g : R \to R$ *con* $g(y) = y^2$ *si ha*

$g \circ f : R \to R$ *con* $(g \circ f)(x) = (a\,x + b)^2$.

Funzione radice

La funzione $y = f(x) = x^n$, con n dispari è iniettiva dunque ha inversa e tale inversa si chiama radice n-sima e si indica con il simbolo $x = f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$.

Grafici

Considerata la stessa funzione $y = f(x) = x^n$, con n pari e $x \in R_0^+$, si può analogamente definire la funzione radice $y^{\frac{1}{n}} : R_0^+ \to R_0^+$.

Osservazione : la scrittura $\sqrt{4} = \pm 2$ è **errata** infatti, per quanto detto prima, si ha $\sqrt{4} = 2$ mentre se si cerca $x \in R : x^2 = 4$, si ha $x = \pm 2$.

Proprietà della operazione di radice n-sima : *dati* $a, b \in R_0^+$; $m, n \in N$ *si ha*

$$\sqrt[n]{a\,b} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad se \quad b \neq 0$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^n}$$

Poniamo $x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}}$ *se* $x \geq 0$ *e* $x^{-\frac{p}{q}} = \dfrac{1}{x^{\frac{p}{q}}}$ *se* $x > 0$.

Valgono le stesse proprietà del caso precedente.

Esponenziali e logaritmi

Dato un numero reale positivo a si chiama funzione esponenziale di base a la funzione $f(x) = a^x$. Tra tutte le basi possibili ce n'è una privilegiata , è il numero $e = 2{,}718281\ldots\ldots$

Proprietà della funzione a^x : (per $a \neq 1$)

$D f = R$, $C f = R^+$

$f(0) = 1$, $f(1) = a$, $f(x+y) = f(x)\, f(y)$, $\forall\, x,y \in R$

f *è iniettiva* .

Come detto, la funzione $y = f(x) = a^x$ *con* $a \neq 1$ è iniettiva dunque ha funzione inversa, tale inversa è la funzione logaritmo in base a , $f^{-1}(y) = \log_a y$ e si ha $f^{-1} : R^+ \to R$.

Proprietà ($a,x,y \in R^+$, $a \neq 1$, $z \in R$)

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$
$$\log_a x^z = z \log_a x$$

Formula di cambiamento di base $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$.

Funzioni trigonometriche

Consideriamo un angolo α (con vertice O e rette r e s) e una circonferenza di centro O che intersechi la retta r in A e la retta s in B, si dice misura in radianti dell'angolo α il numero reale quoziente tra la misura dell'arco AB e la misura del raggio della circonferenza.

Un angolo piatto misura π in radianti mentre la misura in gradi di un radiante è

$$\frac{180^0}{\pi} \approx 57^0\ 17'\ 44'' .$$

Preso un angolo α ripetiamo la costruzione precedente considerando una circonferenza di centro O e raggio unitario (circonferenza goniometrica) ed un riferimento cartesiano di origine O e retta orizzontale r , definiamo $cos\ \alpha$ l'ascissa del punto B e $sin\ \alpha$ l'ordinata di tale punto.

In tal modo abbiamo definito due funzioni , $sin\ \alpha$ e $cos\ \alpha$ al variare di α nell'intervallo [0 , 2π] , estendiamo tali funzioni a tutto R imponendo che siano periodiche di periodo 2π .

Angoli notevoli

$$sin\ \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\ ;\ \cos\ \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ sin\ \frac{\pi}{4} = \cos\ \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ sin\ \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \cos\ \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Formule fondamentali

$\cos\ (-x) = \cos\ x\ ;\ sin\ (-x) = -\ sin\ x$

$\cos\ (\ \pi - x\ ) = -\cos x\ ;\ sin\ (\ \pi - x\ ) = sin\ x$

$\cos\ (\ \frac{\pi}{2} + x\ ) = -\ sin\ x\ ;\ sin\ (\ \frac{\pi}{2} + x\ ) = \cos\ x$

$\cos\ (\ x - y) = \cos x \cos\ y\ +\ sin x\ sin y$

$\cos\ (\ x + y) = \cos x \cos y - sin x\ sin y$

$sin\ (\ x - y\ ) = sin x \cos\ y - sin y \cos x$

$sin\ (x + y) = sin x \cos y + sin y \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - sin^2\ x$

$sin\ 2x = 2\ sin x \cos x$

$sin^2\ x + \cos^2\ x = 1$.

La funzione tangente

Di pone, per definizione, $tg\ x = \dfrac{sin\ x}{\cos\ x}\ ,\ \forall\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ k \in Z$.

EQUAZIONI e DISEQUAZIONI

Consideriamo una funzione $f(x)$, l'espressione $f(x) = 0$ è detta equazione nell'incognita x, mentre $f(x) > 0$ è detta disequazione nell'incognita x e i valori dell'incognita che verificano le relazioni precedenti sono detti soluzioni..

Due equazioni o disequazioni si dicono equivalenti se hanno le stesse soluzioni.

Aggiungendo e togliendo ad ambo i membri di una equazione una stessa funzione definita su tutto R si ottiene una equazione equivalente, mentre moltiplicando o dividendo ambo i membri di una equazione per una stessa funzione definita su tutto R purché diversa da zero, si ottiene una equazione equivalente.

Aggiungendo e togliendo ad ambo i membri di una disequazione una stessa funzione definita su tutto R si ottiene una disequazione equivalente, mentre moltiplicando o dividendo ambo i membri di una disequazione per una stessa funzione definita su tutto R purché positiva, si ottiene una disequazione equivalente.

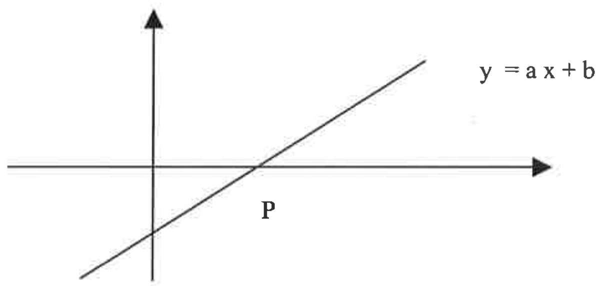
Disequazioni di primo grado

Una disequazione di primo grado è della forma $a\,x + b > 0$; $a, b \in R$, $a \neq 0$.

Se $a > 0$, le soluzioni sono $x > -\dfrac{b}{a}$, se $a < 0$, le soluzioni sono $x < -\dfrac{b}{a}$.

Interpretazione geometrica.

$a > 0$, $P \equiv (-\dfrac{b}{a} , 0)$



Equazioni e Disequazioni di secondo grado

L'equazione $a\,x^2 + b\,x + c = 0$; $a, b, c \in R$, $a \neq 0$, ha le seguenti soluzioni

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad se \quad \Delta > 0 \ ; \quad x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \quad se \quad \Delta = 0 \quad \text{(due soluzioni coincidenti)}$$

non ha soluzioni reali se $\Delta < 0$, dove si è posto $\Delta = b^2 - 4ac$.

Consideriamo la disequazione $a\,x^2 + b\,x + c > 0$ e indichiamo con E l'insieme delle sue soluzioni, abbiamo i seguenti casi :

$$se \quad a > 0 \quad e \quad \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow & E = \ ]-\infty , x_1 [\ \cup \ ] x_2 , +\infty [\\ \Delta = 0 \Rightarrow & E = R - \{x_1\} \\ \Delta < 0 \Rightarrow & E = R \end{cases}$$

$$se \quad a < 0 \quad e \quad \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow & E = \ ] x_1 , x_2 [\\ \Delta = 0 \Rightarrow & E = \Phi \\ \Delta < 0 \Rightarrow & E = \Phi \end{cases}$$

dove con x_1 si è indicata la soluzione minore.

È possibile interpretare geometricamente anche queste disequazioni, considerando, nei vari casi, la posizione rispetto all'asse X della parabola di equazione $Y = a\,X^2 + bX + c$.

POLINOMI

Si chiama polinomio di grado n a coefficienti reali ogni funzione del tipo

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $a_i \in R$, $i = 0,1,2,...,n$, $a_n \neq 0$.

Vale il seguente <u>principio di identità dei polinomi</u> : due polinomi sono uguali se hanno lo stesso grado e hanno uguali i coefficienti dei monomi di ugual grado.

Chiamiamo funzione razionale il quoziente di due polinomi di grado qualunque.

Dati due polinomi $A_n(x)$, $B_m(x)$ rispettivamente di grado n e m con $n \geq m$ esistono due polinomi $Q(x)$, $R(x)$ tali che

- il grado di $R(x)$ è strettamente minore di m
- vale la uguaglianza $A_n(x) = B_m(x)\ Q(x) + R(x)$.

Se $R(x) = 0$ si dice che $A_n(x)$ è divisibile per $B_m(x)$ e $B_m(x)$ è detto divisore di $A_n(x)$; si dice che $A_n(x)$ è irriducibile se non esiste nessun divisore di $A_n(x)$ con grado strettamente minore di n .

Vale il seguente Teorema :

$A_n(x)$ *è divisibile per* $x - c \Leftrightarrow A_n(c) = 0$.

Se un polinomio è divisibile per c, il numero c è detto radice del polinomio e la radice c è detta di molteplicità s se il polinomio è divisibile per $(x-c)^s$ e non per $(x-c)^{s+1}$.

Osserviamo che i polinomi di grado uno sono tutti irriducibili mentre tra i trinomi di secondo grado sono irriducibili quelli con discriminante negativo.

La scrittura di un polinomio come prodotto di polinomi irriducibili è chiamata <u>fattorizzazione del polinomio .</u>

Si può dimostrare che ogni polinomio a coefficienti reali può essere fattorizzato tramite polinomi di primo e secondo grado che siano irriducibili ossia si ha :

ogni polinomio ammette la seguente fattorizzazione

$A_n(x) = a_n (x - c_1)^{m_1} ... (x - c_k)^{m_k} (x^2 + p_1 x + q_1)^{r_1} ... (x^2 + p_h x + q_h)^{r_h}$

dove $c_1, ..., c_k$ sono le radici reali di $A_n(x)$ rispettivamente di molteplicità $m_1, ..., m_k$ mentre i trinomi di secondo grado hanno discriminate negativo e vale la relazione

$m_1 + ... + m_k + 2(r_1 + ... + r_h) = n$.

Osserviamo che si hanno le seguenti proprietà :

- il polinomio $x^n - a^n$ è sempre divisibile per $x - a$; se n è pari è divisibile anche per $x + a$,

- il polinomio $x^n + a^n$ è divisibile per $x + a$ se n é dispari ; se n è pari non è divisibile né per $x + a$ né per $x - a$,
- le eventuali radici intere di $A_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_i \in Z$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, sono da cercare tra i sottomultipli di a_0 compreso il numero 1 presi con segno sia positivo che negativo,
- le eventuali radici razionali di $A_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_i \in Z$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, sono da cercare tra i razionali del tipo $\pm \frac{p}{q}$ dove p è sottomultiplo di a_0, compreso il numero 1, e q è sottomultiplo di a_n, compreso il numero 1.

Regola di Ruffini

La regola di Ruffini dà un risultato inerente la divisione tra un polinomio di grado $n \geq 1$ ed un polinomio di primo grado. Tale regola afferma che:

considerato il polinomio $A_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, *di grado* $n \geq 1$, *si ha* $A_n(x) = (x - a)\, B(x) + r$ *dove i coefficienti del polinomio* $B(x) = b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ *ed il resto* r *sono dati dalle formule*

$b_{n-1} = a_n$, $b_{k-1} = a_k + a b_k$, $k = n-1, \ldots, 0$ *avendo posto* $b_{-1} = r$.

Vediamo una applicazione concreta di questa regola:

dividiamo il polinomio $x^3 - 2x + 1$ per $x - 2$.

Procediamo con uno schema (che segue) nel quale nella prima riga si scrivono i coefficienti del polinomio di partenza procedendo da sinistra a destra secondo potenze decrescenti della variabile x.

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 0 & -2 & 1 \\
2 & & 2 & 4 & 4 \\
\hline
 & 1 & 2 & 2 & 5
\end{array}
$$

Il coefficiente del termine di grado massimo di B(x) coincide con quello del polinomio di partenza, il secondo si ottiene moltiplicando per 2 il coefficiente appena detto e sommando il risultato con il secondo coefficiente del polinomio di partenza e così via fino ad ottenere il resto.

Nel caso specifico si ha

$x^3 - 2z + 1 = (x - 2)(x^2 + 2x + 2) + 5.$

Equazioni e Disequazioni di grado superiore al secondo

Sono del tipo $A_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ *oppure* $A_n(x) \geq 0$.

La risoluzione di tali equazioni o disequazioni prevede la fattorizzazione del polinomio a primo membro. Ciò può essere fatto anche utilizzando la regola di Ruffini.

Sistemi di disequazioni

La disequazione

$\begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases}$ dove $A(x)$ *e* $B(x)$ sono generiche funzioni della variabile x, equivale alla intersezione tra le soluzioni della prima disequazione con quelle della seconda disequazione.

Ovviamente discorso analogo vale anche se le disequazioni sono più di due.

Disequazioni fratte

Consideriamo la disequazione $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$, $x : B(x) \neq 0$ dove $A(x)$ *e* $B(x)$ sono funzioni nella variabile x . L'insieme delle soluzioni è dato da

$$\begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} A(x) < 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$$

Esempi con interpretazione geometrica

Equazioni e Disequazioni irrazionali

Supponiamo di dover risolvere l'equazione $A(x) = B(x)$ nella quale compaiono dei radicali e, per eliminare tali radicali eleviamo tutto alla potenza p ottenendo $(A(x))^p = (B(x))^p$, se p è dispari le due equazioni sono equivalenti , mentre se p è pari la seconda può avere più soluzioni della prima quindi si deve controllare se le soluzioni della seconda sono anche soluzioni della prima o no e in questo secondo caso scartarle.

Esempio : $\sqrt{2x - 1} = x - 2$.

Consideriamo ora la disequazione $\sqrt[n]{A(x)} > B(x)$;

essa è equivalente a $A(x) > (B(x))^n$ *se* n *è dispari* ;

mentre è equivalente a $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) > (B(x))^n \end{cases} \cup \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$ *se n è pari* .

La disequazione $\sqrt[n]{A(x)} < B(x)$

è equivalente a $A(x) < (B(x))^n$ *se n è dispari* ;

mentre è equivalente a $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) > (B(x))^n \end{cases}$ *se n è pari* .

Equazioni e Disequazioni esponenziali e logaritmiche

Vediamo alcuni esempi

$4^x + 2^{x+2} - 5 = 0$; $7^{x+1} + 7^{x-1} = 5^x$, $9^x - 3(3^x) + 2 \geq 0$

$\log_2 \sqrt{x+5} = 3$; $\log_3 (2x+3) \leq 3$

Equazioni e Disequazioni trigonometriche

Vediamo alcuni esempi

$sin\ x = \frac{1}{2}$; $3\cos^2 x - 11 \cos x + 6 = 0$; $\cos 2x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

Disequazioni con valore assoluto

La disequazione $|A(x)| < B(x)$ è equivalente a $\begin{cases} A(x) < B(x) \\ A(x) > -B(x) \end{cases}$;

la disequazione $|A(x)| > B(x)$ è equivalente a

$A(x) > B(x) \cup A(x) < -B(x)$.

Controllo concettuale sugli argomenti precedenti

Nel caso di affermazioni, se ritenute vere vanno dimostrate, se ritenute false si deve fornire un controesempio

1) a, b irrazionali $\Rightarrow$ $a + b$ irrazionale
2) $a + b$ irrazionale $\Rightarrow$ a, b irrazionali
3) $a + b > b + c \Leftrightarrow a > c$
4) $a|c| < b|c| \Leftrightarrow a < b$
5) $a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
6) quale è la definizione di funzione
7) quale è la definizione di funzione iniettiva
8) come capire dal grafico se una funzione è iniettiva
9) come capire dal grafico se una funzione è biunivoca
10) dare un esempio di $f : R \to R$ che sia iniettiva ma non suriettiva
11) dare un esempio di $f : R \to R$ che sia suriettiva ma non iniettiva
12) dare un esempio di $f : R \to R$ che sia biunivoca
13) quale è la definizione di funzione composta
14) quale è la definizione di funzione inversa
15) se f è una funzione allora $f(x+y) = f(x) + f(y)$
16) se f è una funzione allora $f(3x) = 3f(x)$
17) se f è una funzione e $f(x) = f(y)$ allora $x = y$
18) se f è una funzione decrescente e $x < y$ allora $f(x) > f(y)$
19) una retta verticale interseca il grafico di una funzione al più una volta
20) se f e g sono funzioni allora $g \circ f = f \circ g$
21) se f è biunivoca e non si annulla allora $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$
22) $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y, \ \forall a > 0$
23) quale tra queste funzioni $2^{|x|}$, $|2^x|$, 2^{x^2} è pari
24) $3^{x+2y} = 3^x \ (3^y)^2$
25) $2^x \ 3^x = 5^x$

26) $\ln(x-3y) = \dfrac{\ln x}{\ln y^3}$

27) dividendo una uguaglianza per e^x si una uguaglianza equivalente

28) $0 < x < y \Rightarrow \log_a x < \log_a y$, $\forall\ a > 0$, $a \neq 1$

29) $x > 0 \Rightarrow (\ln x)^3 = 3 \ln x$

30) $x > 0$, $a > 1 \Rightarrow \dfrac{\ln x}{\ln a} = \ln \dfrac{x}{a}$

Esercizi

1) Quale tra questi numeri è razionale :

$0{,}1$; $0{,}3\overline{4}$; π ; 0 ; -7 ; $\sqrt{2}$; $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$; $\dfrac{4}{5}$; $\dfrac{12}{4}$; 100 ; $\dfrac{27}{13}$; $2{,}79$.

2) Scrivere l'equazione della retta passante per $P \equiv (1, -\frac{1}{3})$ e con coefficiente angolare $m = 2$ e dire quali tra le seguenti affermazioni sono vere : essa è parallela alla retta $y = 2x$; essa è perpendicolare alla retta di equazione $y = \frac{1}{2}x$; essa appartiene al fascio di rette di equazione $y + \frac{1}{3} = m(x-1)$; essa passa per il punto $Q \equiv (\frac{7}{6}, 0)$.

3) Scrivere l'equazione della circonferenza di raggio 4 e centro $C \equiv (-3,3)$. Passa per l'origine $O \equiv (0,0)$? In caso negativo scrivere l'equazione della circonferenza con lo stesso centro e passante per l'origine.

4) Disegnare le parabole di equazione
$y = x^2$; $y = 1 - x^2$; $y = x^2 - 2x + 1$; $y = -x^2 + 5x - 6$. Per ognuna determinare il vertice e le intersezioni con l'asse x .

5) Disegnare le curve di equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$; $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$.

6) Per quali valori di $k \in R$ (se esistono) l' equazione $(2+k)x^2 + (2-k)y^2 + 6y - 7 = 0$ è l'equazione di una circonferenza? $k = 0$, $k < -2$; $k \neq 0$; *per nessun valore di* k .

7) Si consideri l'uguaglianza (in generale falsa) $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$. Per quali valori di

a e b (se esistono) l'uguaglianza diventa vera?

1) $b = 0$, $a \neq 0$; 2) $a = b$; 3) $a = b = 0$; 4) $a = 0$, $b \neq 0$.

8) Dove è l'errore, indicare l'implicazione errata . Siano $a, b \in R$, $a \neq b$ e sia $c = \frac{a+b}{2}$,

si ha

$$a + b = 2c \Rightarrow (a+b)(a-b) = 2c(a-b) \Rightarrow a^2 - b^2 = 2ac - 2bc \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 - 2ac = b^2 - 2bc \Rightarrow a^2 - 2ac + c^2 = b^2 - 2bc + c^2 \Rightarrow (a-c)^2 = (b-c)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a - c = b - c \Rightarrow a = b \ .$$

9) L'equazione $a x^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, ha radici reali distinte se ……; radici reali coincidenti se ………; non ha radici reali se……….

10) Scrivere le equazioni di secondo grado che hanno le radici indicate :

$x_1 = x_2 = 1$; $x_1 = 1$, $x_2 = -1$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

11) Se è possibile, semplificare la espressione $\frac{(a+b)^2 - c^2}{c - a + b}$.

12) Scrivere come una unica potenza la seguente espressione $\frac{(\sqrt{a^{-7}})^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}}$, e indicare i valori di a per cui ha senso.

13) Disporre in ordine crescente i seguenti numeri reali

$2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$; $2^4 \cdot 2^{-1}$; $\frac{2^3}{2}$; $\frac{3^2}{2}$; $2^2 + 2^3$; 2^{-4} ; -2^4 ; 2^0 ; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$.

14) Disporre in ordine crescente i seguenti numeri reali

$\log_{10} 100$; $\log_{10} 0{,}1$; $\log_{10} (0{,}1)^{-1}$; $\log_{10} 1$; $\log_{10} 10$; $\log_{10} (0{,}1)^3$; $\log_{10} \sqrt[3]{10}$; $\log_{10} 10^5$.

15) Dire se le seguenti uguaglianze sono vere

$\forall x \in R$: $\sqrt{x^2} = x$; $\sqrt[3]{x^3} = x$; $\sqrt{x^4} = x^2$; $\sqrt{x^2} = |x|$.

16) La seguente uguaglianza è vera o falsa?

$$\frac{1-x^7}{1-x} = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \ , \ \forall x \neq 1 \ .$$

17) Vero o falso ($\Leftrightarrow$ si legge se e solo se)

$(x - x^3)^2 \geq 0$, $\forall x \in R$; $x^2 < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$; $x^3 < 2 \Leftrightarrow x < \sqrt[3]{2}$;
$|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$; $x^2 \leq |x| \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

18) Vero o falso ?

$\ln \frac{4}{3} = \ln 4 - \ln 3$; $\ln 4 + \ln 4 = \ln 16$; $\ln 25 = 2 \ln 5$; $\ln 4 + \ln \frac{1}{4} = 0$; $\log_2 10^2 > \log_{10} 10^2$.

19) Scrivere le soluzioni delle seguenti equazioni

$\cos x = \frac{1}{2}$; $sin\ x = -\frac{1}{2}$; $tg\ x = 1$; $sin^2\ x + \cos^2 x = 1$.

20) Per quali valori di $x \in R$ ha significato ognuna di queste funzioni

$tg\ x$; $x^{\frac{1}{4}}$; $x^{\frac{1}{3}}$; $\log_{10} x$; $\sqrt{x-1}$; $|x-1|$; $\frac{1}{x^2-1}$; 3^x .

21) Per quali valori di $x \in R$ ognuna di queste funzioni è strettamente positiva (> 0)

3^x ; $\log_{10} x$; $\frac{x}{x^2+3}$; $\sqrt{x^2+3}$; $x^3(1+x^4)$; $|x-27|$; $\sqrt{1-\cos^2 x}$; $sin\ x$.

Esercizi (dal testo P.BOIERI – G. CHITI “Precorso di Matematica” ed. Zanichelli)

Esercizi a pag. 83, 84, 85

Esercizi 5.1; 5.2; 5.5; 5.6 a pag. 101

Esercizi 6.1; 6.9 a pag. 123

Esercizi a pag. 138, pag. 139 e 7.10; 7.11; 7.15; 7.16; 7.17 a pag. 140

Esercizi a pag. 156 e 8.8; 8.9; 8.12 a pag. 157

Esercizi 9.8; 9.9; 9.10; 9.11 a pag. 181

3 Test da pag.215 a pag.227

Gli Argomenti precedentemente trattati si possono trovare sempre nel testo **P.BOIERI – G.CHITI “Precorso di Matematica” ed. Zanichelli** nei Capitoli di seguito indicati:

Capitolo 1 paragrafi 1.1; 1.2; 1.3
Capitolo 2 paragrafi 2.1; 2.2
Capitolo 4 paragrafi 4.1; 4.2; 4.3; 4.4; 4.5; 4.6
Capitolo 5 paragrafi 5.1; 5.2; 5.3; 5.4
Capitolo 6 paragrafo 6.3
Capitolo 7 paragrafi 7.2; 7.2; 7.3; 7.4; 7.5
Capitolo 8 paragrafi 8.1; 8.3; 8.4; 8.6
Capitolo 9 paragrafi 9.1; 9.2; 9.3; 9.4; 9.5